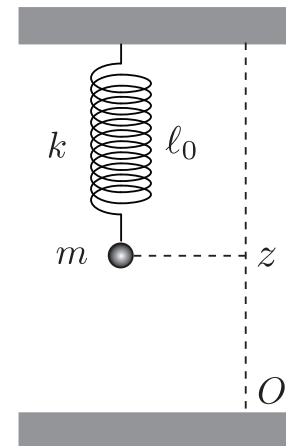


1 Boule suspendue à un ressort

🎯 **Objectif** : Energie, équilibre et dynamique d'une boule attachée à un ressort.

📖 **Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique; 7.2 Equilibre et stabilité.

Une boule de masse m est suspendue verticalement à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 , dont le point d'attache est fixé au plafond de hauteur h .



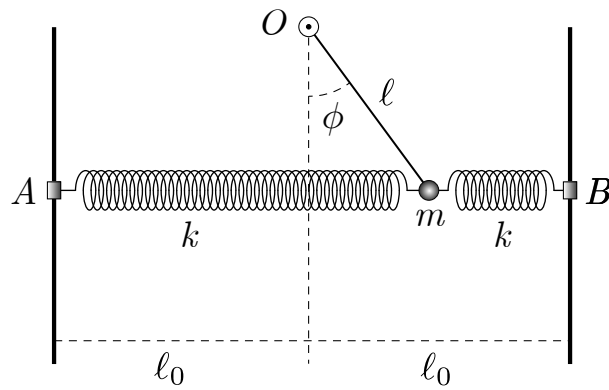
- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale $V(z)$ en définissant avec soin les références d'énergie potentielle.
- Déterminer la position d'équilibre z_0 de la boule et montrer qu'elle est stable.
- Ecrire l'énergie mécanique totale $E(z, \dot{z})$.
- En déduire l'équation du mouvement de la boule.
- Déterminer l'élongation maximale ℓ du ressort avec une longueur initiale $\ell_0/2$ lorsque la boule est lâchée sans vitesse initiale.

2 Système pendule et ressorts

🎯 **Objectif** : Energie, équilibre et dynamique d'un pendule attaché à deux ressorts identiques.

📖 **Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique; 7.2 Equilibre et stabilité.

Un pendule mathématique de masse m , de longueur $\ell < \ell_0$, est lié à deux ressorts maintenus horizontaux par des liaisons coulissant sans frottement en A et B . La constante élastique de chaque ressort vaut k et leur longueur à vide ℓ_0 . Le pendule est libre de tourner entièrement, i.e. $\phi \in [0, 2\pi)$.



- Déterminer l'énergie potentielle totale $V(\phi)$ du système formé du pendule et des ressorts.
- Déterminer les quatre angles d'équilibre ϕ_0 et discuter leur stabilité.
- Déterminer l'énergie mécanique $E(\phi, \dot{\phi})$ et en déduire l'équation du mouvement du pendule.
- Identifier la pulsation ω dans l'approximation des petites oscillations par rapport à l'angle d'équilibre stable $\phi_0 = 0$.
- Identifier la pulsation ω dans l'approximation des petites oscillations par rapport à l'angle d'équilibre stable $\phi_0 = \pi$ si $2k\ell > mg$.

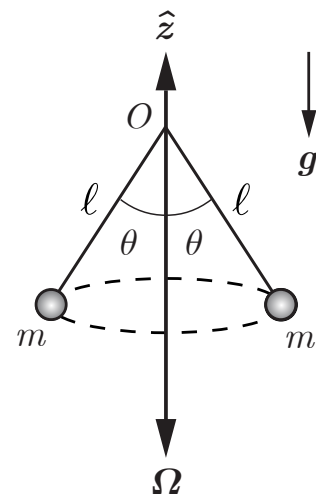
3 Régulateur de Watt

🎯 **Objectif** : Energie, équilibre et dynamique d'un régulateur de Watt.

📖 **Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique; 7.2 Equilibre et stabilité.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Un régulateur de Watt est constitué de deux boules, considérées comme des points matériels de masse identique m , attachés aux extrémités inférieures de deux tiges de masse négligeable et de longueur ℓ libres d'osciller dans un plan vertical. Les extrémités supérieures sont attachées au point fixe O d'un axe de rotation vertical. Le régulateur tourne à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \hat{z}$, où $\Omega > 0$, autour de l'axe de rotation vertical.



Lors de la rotation des tiges autour de l'axe vertical, un dispositif assure que les tiges se déplacent de manière symétrique par rapport à cet axe dans un plan vertical contenant l'axe. Le dispositif expérimental est tel que l'angle nodal satisfait la condition $0 < \theta < \pi/2$.

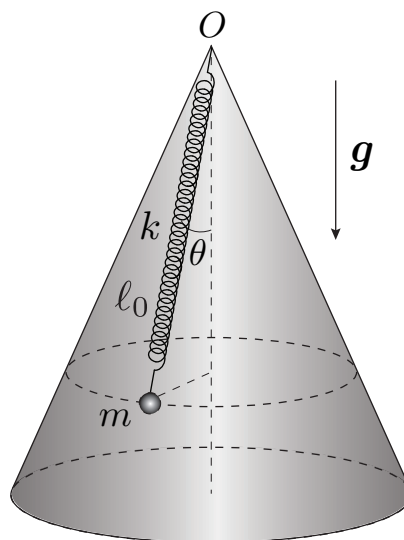
- Déterminer l'équation du mouvement nodal d'une boule à l'aide de la deuxième loi de Newton.
- Déterminer l'énergie mécanique $E(\theta, \dot{\theta})$ de cette boule. Dans le cas général, montrer que l'énergie n'est pas conservée. Spécifier dans quel cas particulier l'énergie est conservée.
- Identifier la grandeur conservée $h(\theta, \dot{\theta})$, proportionnelle à $m \ell^2$, en intégrant l'équation du mouvement.
- Déterminer l'angle d'équilibre θ_0 . Discuter son existence et sa stabilité.

4 Boule frottant sur un cône

🎯 **Objectif** : Energie, dynamique d'un point matériel avec frottement.

📖 **Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique.

Une boule considérée comme un point matériel de masse m est attachée à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 . Le ressort est fixé au sommet O d'un cône de demi angle d'ouverture θ . La boule se déplace sans frottement sur la surface extérieure du cône. Elle subit une force de frottement visqueux $\mathbf{F}_f = -b\mathbf{v}$. On suppose que la vitesse angulaire de la boule n'est pas suffisante pour qu'elle puisse décoller.



- (a) Déterminer l'énergie $E(r, \dot{r}, \dot{\phi})$ de la boule en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal qui contient le sommet O du cône et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort à vide.
- (b) Déterminer la dérivée temporelle de l'énergie mécanique de la boule $\dot{E}(r(t), \dot{r}(t), \dot{\phi}(t))$.
- (c) Calculer la puissance dissipée par frottement P en termes du temps d'amortissement τ et de la pulsation ω_0 définis comme,

$$\tau = \frac{m}{b} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- (d) En déduire que le mouvement du point matériel est régie par l'équation,

$$m \dot{r} \left(\ddot{r} + \frac{1}{\tau} \dot{r} + \omega_0^2 \left(r - \ell_0 - \frac{g}{\omega^2} \cos \theta \right) - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + m r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + 2 \frac{\dot{r}}{r} + \frac{1}{\tau} \right) = 0.$$

- (e) Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre r_0 .